Série dont la moyenne vaut $13 + \frac{9}{13}$

PAR OLIER RABY
2005

1 Énoncé du problème

Trouver une série de nombres entiers, un élément en moins, dont la moyenne est $13 + \frac{9}{13}$.

2 Hypothèses

Tel que présenté, l'énoncé laisse une part importante aux hypothèses. Je pose donc ce qui suit. Les nombres sont consécutifs. La série commence à 1 et est croissante (elle ne commence donc pas à -42 et n'est pas décroissante).

Dès lors, il est facile d'inférer ce qui suit. La somme $1 + 2 + \cdots + n$ vaut $\frac{n(n+1)}{2}$. Une somme d'entiers, peu importe lesquels, est toujours un nombre entier (par exemple, $2 + 6 + 5 = 13$). Par ailleurs, le numérateur de la moyenne, 13, est un nombre premier. La somme des entiers doit donc être un multiple de 13 (par exemple, 39 et 91 sont multiples).

3 Méthodes envisagées

Sachant tout cela, j'ai envisagé trois méthodes pour résoudre :

1. Utiliser un logiciel mathématique spécialisé, par exemple : Octave, Maple ou Mathematica.
2. Résoudre par l'algèbre.
3. Sachant que la théorie des nombres est d'un accès difficile à plusieurs égards, résoudre par essais et erreurs en utilisant ce que j'ai déjà mentionné.

4 Méthode retenue

Je ne retiens pas la première méthode, car seul Octave est gratuit et je ne le connais pas. Il y a aussi le coût c. le bénéfice à considérer.

Je tente l'approche algébrique.

Je pose l'égalité de la somme des entiers en fonction de la moyenne :

$$\frac{1 + 2 + \cdots + k + \cdots + n}{n} = \overline{x'}$$

$$1 + 2 + \cdots + k + \cdots + n = n\overline{x'}$$

$$\frac{n(n+1)}{2} = n\overline{x'}$$

Cette formule n'est pas la transcription exacte du problème, c'est pourquoi j'ai utilisé k et $\overline{x'}$. Pour modéliser le problème, il faut considérer le terme k, celui qui sera absent de la série :

$$\frac{n(n+1)}{2} - k = n\overline{x'} - k$$

ou encore,

$$\frac{n(n+1)}{2} - k = (n-1)\overline{x}$$

Injectant la valeur connue de la moyenne, on a

$$\frac{n(n+1)}{2} - k = (n-1)\frac{169+9}{13}$$

$$\frac{n(n+1)}{2} - k = (n-1)\frac{178}{13} \tag{1}$$

Après simplification, on voit apparaître une équation du second degré en n :

$$13n^2 - 343n + (356 - 26k) = 0$$

Je vous épargne la suite des calculs, qui demande les outils de la théorie des nombres pour résoudre. Vous devez seulement savoir que, sachant le temps que cela prendrait pour résoudre, je suis passé à la dernière méthode qui me semblait raisonnable.

L'équation 1 est le point de départ de ma démarche.

$$\frac{n(n+1)}{2} - k = (n-1)\frac{178}{13}$$

La fraction à droite demande que $(n-1)$ soit divisible par 13, car le terme à gauche est nécessairement un entier.

Posons $n = 13$, nous avons

$$\frac{13(13+1)}{2} - k = (13-1)\frac{178}{13}$$

$$\frac{13 \times 14}{2} - k = (12)\frac{178}{13}$$

Cette hypothèse ne va pas, car la somme serait égale à une fraction.

Posons $n = 14$, nous avons

$$\frac{14(14+1)}{2} - k = (14-1)\frac{178}{13}$$

$$105 - k = 178$$

Cette hypothèse ne va pas, car $k = -73$ n'appartient pas à la série.
Posons que $n = 27$ (et non pas 26) :

$$\frac{27(27+1)}{2} - k = (27-1)\frac{178}{13}$$

$$378 - k = 2 \times 178 = 356$$

Avec $k = 22$, nous avons trouvé une solution au problème.
La série $\{1, 2, \ldots, 21, 23, \ldots, 27\}$ résoud le problème.

5 Autre série

Existe-t-il une autre série qui résoud le problème ? Essayons avec $n = 40$

$$\frac{40(40+1)}{2} - k = (40-1)\frac{178}{13}$$

$$820 - k = 3 \times 178 = 534$$

Avec $k = 286$, l'équation est valide. Cependant, cette valeur n'est pas un élément de $\{1, 2, \ldots, 40\}$. À rejeter, donc.

6 Conclusion

L'équation 1, une fois simplifiée, est une fonction de deux variables. Elle a au moins un ensemble-solution, celui que nous connaissons : $\{n = 27, k = 22\}$. En observant les trois possibilités de solution jusqu'à maintenant, je suis porté à croire qu'il n'y a pas d'autres solutions. Cependant, seule la théorie des nombres pourrait confirmer mon hypothèse.